Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Quotientenräume**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{R}^2$ und der Unterraum $U := \langle(0,1)\rangle$. Wie sehen die Elemente des Quotientenraumes V/U aus? Berechnen Sie hierzu die folgenden Elemente aus V/U und zeichnen diese in die reelle Zahlenebene ein. Wie lassen sich die Elemente aus V/U geometrisch beschreiben?

- $v_1 = 2 \cdot [(1,0)] - [(1,1)] + 3 \cdot [(1,-1)]$
- $v_2 = 5 \cdot [(1,1)] - 2 \cdot [(0,2)] - 4 \cdot [(1,0)]$
- $v_3 = 3 \cdot [(-1,0)] + 5 \cdot [(0,2)] - 2 \cdot [(0,2)]$

Bem.: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $[(x,y)] = (x,y) + U = \{(x,y) + (u_1,u_2) : (u_1,u_2) \in U\}$ ein Element des Quotientenraums V/U, wobei man (x,y) einen Vertreter der entsprechenden Äquivalenzklasse nennt. Beim Addieren zweier Äquivalenzklassen bzw. beim Multiplizieren einer Äquivalenzklasse mit einem Skalar, wird mit den Vertretern gerechnet.

Aufgabe 2 (1)
Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ und der Unterraum $U := \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Begründen Sie geometrisch wie die Elemente des Quotientenraumes V/U aussehen. Berechnen Sie die folgenden Elemente aus V/U und geben jeweils zwei weitere Vertreter derselben Äquivalenzklasse an:

- $v_1 = 3 \cdot [(1,-1,0)] + [(2,0,-2)] - 2 \cdot [(3,0,-1)]$
- $v_2 = 2 \cdot [(-1,-1,4)] - 3 \cdot [(1,2,3)] - [(4,-2,0)]$
- $v_3 = [(10,-5,2)] + [(-1,2,-4)] + 6 \cdot [(0,2,1)]$

Aufgabe 3 (2)
Sei $V := \mathbb{P}_{n\leq 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen von maximal zweitem Grad. Weiter sei $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = C \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ wobei } C \in \mathbb{R}\}$ der Unterraum aller konstanten Polynomfunktionen. Wie sehen die Elemente aus V/U aus? Bestimmen Sie hierzu zunächst eine Basis von V/U und geben zu den folgenden Äquivalenzklassen jeweils zwei weitere Vertreter an. Zeichnen Sie die Vertreter in ein Koordinatensystem ein.

- $f_1 = [x^2 - 2x + 3] + [2x - 1] + [5]$
- $f_2 = [-2x^2 + 5] + [3x^2 + 2x - 1] - [x^2 + 4]$
- $f_3 = [4x^2 + 7x - 1] - [-2x^2 + 4x + 7] - [6x^2 + 3x - 9]$
- $f_4 = [3x + 9] + [7x^2 + 3] - [5x^2 + 2x + 10]$